Taburetes, soliņi un ķebļi

Ne katru dienu rodas vēlme aprakstīt situāciju, kāda izveidojās ap vienu konkrētu programmēšanas uzdevumu. Stāsts būs par Latvijas 34. informātikas olimpiādes iesildīšanās sacensībās 2020. gada decembrī izmantoto uzdevumu "Soliņi".

Veidojot uzdevumu komplektu šīm treniņsacensībām, kopējais LIO žūrijas viedoklis bija, ka nevajag censties izdomāt ko oriģinālu, bet izmantot iepriekšējo gadu gatavus uzdevumus, kuriem jau ir sagatavoti risinājumi un testi, un kuri praktiski bez papildu darba ir gatavi izmantošanai.

No resursu taupīšanas viedokļa tas, protams, bija pareizi, bet, lai nezaudētu uzdevumu gatavošanas iemaņas, kas, gluži tāpat kā sportā, regulāri ir jātrenē, es nolēmu formulēt arī vairākus vēl nebijušus uzdevumus kā sagatavi izmantojot relatīvi sen notikušu sacensību uzdevumus.

Viens no šiem "iedvesmas" uzdevumiem, kas labu laiku jau bija nogulējis manā sacensību uzdevumu mapītē, bija uzdevums "Табуретки - 2" no 2005. gada Krievijas Novadu olimpiādes (skat. https://imcs.dvfu.ru/cats/static/problem_text-cpid-521005.html).

Uzdevuma ideja bija skaista savā vienkāršībā: "Taburetes izgatavošanai nepieciešamas četras vienāda garuma kājas, bet rūpnīcai tiek piegādātas $N (N \le 10^4)$ mazliet atšķirīga garuma taburešu kājas. Kāju garumi ir $L_1, L_2, \ldots, L_N$ $(1 \le L_i \le 100)$. Zināms, ka $N \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 4)$. Taburetes kājas garumu var samazināt, to apzāģējot (nozāģētā daļa nav tālāk izmantojama un tiek izmesta). Nepieciešams noteikt, ar kādu mazāko zāģējumu skaitu var nodrošināt $N/4$ taburešu izgatavošanu."

Diezgan acīmredzami, ka 15 gadu laikā, kas pagājuši no šī uzdevuma izmantošanas sacensībās, ir mainījušies datu apjoma ierobežojumi, kas tradicionāli tiek doti šādos uzdevumos.

Pirmkārt, šķita, ka N vērtība būtu jāpalielina uz šobrīd jau tradicionālo 10^5. Otrkārt, kāpēc garumu vērtības būtu jāievada pa vienai? Var taču uzskatīt, ka vienāda garuma kājas tiek piegādātas sūtījumos, kur katrā sūtījumā ir vismaz viena un ne vairāk kā 10^9 kājas. Kāju garums dažādos sūtījumos var gan atšķirties, gan sakrist. Arī kā kāju maksimālā garuma ierobežojumu izvēlējos 10^9. Treškārt, kāpēc taburetei jābūt tieši četrām kājām? Klasiskas taburetes ir arī ar trim kājām, bet izdomātajā programmētāju pasaulē varētu būt arī taburetes ar $K (3 \le K \le 100)$ kājām. Nosacījumu, ka visu piegādāto kāju kopskaits ir K daudzkārtnis, saglabāju, lai uzdevumu pārlieku nepagrūtinātu.

Tagad, atskatoties uz šo uzdevuma veidošanas gaitu, ir skaidrs, ka uzdevumu es uzskatīju par gauži vienkāršu un visas aprakstītās modifikācijas uzskatīju par iespējamām un "paceļamām" bez šaubu ēnas.

Domājot par uzdevuma nosaukumu, "taburešu" vietā piemērotāki šķita "soliņi", lai gan tagad domāju, ka arī "ķebļiem" būtu, bijis savs šarms. Īpaši domājot par simtkājainiem izstrādājumiem.

Aprakstīto modifikāciju rezultātā iegūtā uzdevuma teksts:

Soliņi

Alberts strādā mēbeļu uzņēmumā, kurā šobrīd tiek izgatavoti unikāla dizaina koka soliņi ar K kājām. Katra soliņa visām kājām jābūt vienāda garuma, bet dažādiem soliņiem kāju garums var atšķirties.

Soliņu kājas uzņēmumam piegādā apakšuzņēmējs, un katrā sūtījumā ir vienāda garuma kājas. Garums tiek izteikts kā naturāls skaitlis kaut kādās specifiskās vienībās. Kāju skaits katrā sūtījumā var atšķirties, bet visos sūtījumos kopā kāju skaits ir K daudzkārtnis. Alberts ir izdomājis, ka nepieciešamības gadījumā kājas var saīsināt, tās apzāģējot (nozāģētā daļa nav tālāk izmantojama).

Piemēram, ja K=4 un ir saņemti trīs sūtījumi: 21 kāja garumā 37, 25 - garumā 38 un 14 - garumā 37, tad, apzāģējot vienu kāju garumā 38 līdz garumam 37, varēs izgatavot deviņus soliņus ar kāju garumu 37 un sešus ar kāju garumu 38.

Uzrakstiet programmu, kas aprēķina mazāko apzāģējamo kāju skaitu, kāds nepieciešams, lai soliņu izgatavošanā izmantotu visas piegādātās kājas!

Ievaddati

Pirmajā rindā doti divi naturāli skaitļi - K (soliņa kāju skaits, $3 \le K \le 100$) un N (piegādāto sūtījumu skaits, $N \le 10^5$).

Katrā no nākamajām N rindām dots viena sūtījuma apraksts: divi naturāli skaitļi - piegādāto kāju skaits sk_i ($1 \le sk_i \le 10^9$) un garums g_i ($1 \le g_i \le 10^9$).

Zināms, ka $\sum_{i=1}^{N} sk_i \equiv 0 (mod\ K)$.

Starp katriem diviem blakus skaitļiem ievaddatos ir tukšumzīme.

Izvaddati

Izvaddatu vienīgajā rindā jāizvada vesels nenegatīvs skaitlis - mazākais apzāģējamo kāju skaits.

Piemēri

Ievaddati	Izvaddati
4 3 21 37 25 38 14 37	1

Ievaddati	Izvaddati
53 1 583 2	0

Ievaddati	Izvaddati
5 3 2 539 1 7 2 38	4

Ierobežojumi un prasības

Atmiņas apjoma un izpildes laika ierobežojumus skatīt kā paziņojumu testēšanas sistēmā.

Klases vārds valodā Java rakstītam risinājumam: **Solini**

1.apakšuzdevuma testu ievaddati

Ievaddati
10 9 211 1 253 2 141 3 143 4 624 5 143 6 141 7 253 8 211 9

Ievaddati
17 9 83 27 58 23 53 73 83 72 58 32 53 37 83 23 71 27 53 37

Ievaddati
15 8 2 53 11 7 2 38 12 53 1 71 2 59 13 17 2 53

Apakšuzdevumi un to vērtēšana

Nr.	Testu apraksts	Punkti
1.	Uzdevuma tekstā dotie trīs testi	2
2.	$N \leq 100$	8
3.	$K = 3$, $N > 100$	20
4.	Visiem i ($1 \leq i \leq N$) $sk_i = 1$	10
5.	Visiem i ($1 \leq i \leq N$) $g_i \leq 1000$	20
6.	Bez papildu ierobežojumiem	40
	Kopā:	100

Apakšuzdevumu izvēlē tika izmantoti klasiskie principi: Pirmajā apakšuzdevumā bija nepieciešams atrast jau uzdevuma tekstā doto testu atbildes, otrajā - atrisināt uzdevumu nelielām N vērtībām, trešajā - tikt galā ar trīskāju soliņiem, ceturtajā - atrisināt uzdevumu, ja katrā sūtījumā ir tikai viena kāja (šis attāli līdzinās oriģinālajam uzdevumam), piektajā - garantēts, ka kāju garumi nepārsniedz 1000, bet sestais bija bez papildu ierobežojumiem.

Iecerētais risinājums bija šāds: Sakārtojam visas kājas pēc garumiem dilstošā secībā un uzreiz no katra garuma kājām izveidojam lielāko iespējamo K kāju komplektu skaitu. Tātad katram garumam paliks kāju skaits robežās no 0 līdz K-1, kur 0 (visas kājas jau izdevies izmantot komplektu veidošanā) mūs vairs neinteresē, un turpmāk darbosimies tikai ar tiem garumiem, kur kājas ir nenulles skaitā. Ja šādu garumu nav (visas kājas izdevās salikt pa komplektiem bez zāģēšanas), tad atbilde ir 0.

Ja tomēr kādiem garumiem kāju atlikums ir nenulles skaitlis, var izmantot vienkāršu novērojumu. Tā kā visu kāju kopskaits bija K daudzkārtnis, visas piegādātās kājas arī nāksies izmantot. No šī seko, ka visgarākās kājas nāksies apzāģēt.

Tālāk iezīmējas vienkāršs algoritms: pārbaudām, vai ar šobrīd pieejamo kāju, kuras noteikti nāksies apzāģēt, daudzumu pietiek, lai kopā ar kārtējā garuma kājām to kopskaits būtu vismaz K (varētu izveidot komplektu). Ja pietiek, tad izveidojam soliņu un pieskaitām apzāģēto kāju skaitu. Ja nē, tad arī šī garuma kājas nāksies apzāģēt un pievienojam tās apzāģēšanai pieejamo kāju kolekcijai. Tad aplūkojam nākamā garuma kājas un procesu turpinām. Tas, ka kāju kopskaits ir K daudzkārtnis, garantē, ka, vēlākais, pie visīsākā garuma kājām veselu kāju komplektu izdosies izveidot.

Risinot 1. apakšuzdevuma 2. testu, iegūsim, ka kāju skaits garumiem, kas sakārtoti no lielākā uz mazāko, ir

Garums	73	72	37	32	27	23
Skaits	2	15	4	7	1	5

un nāksies apzāģēt divas 73 garuma kājas (kopā ar garuma 72 kājām veido viena soliņa kāju komplektu), kā arī visas kājas garumā 37, 32 un 27, kas ļauj izveidot soliņa kāju komplektu ar kājām garumā 23.

Šajā beidzamajā posmā var ievērot, ka aktuālie kāju garumi nav svarīgi. Svarīgs ir tikai apzāģēšanas fakts, nevis, piemēram, nozāģētās daļas garums. Pietiek, ka zinām, ka kāju skaita atlikumi pēc dalīšanas ar K ir sakārtoti dilstošā secībā pēc garumiem.

Tātad sagatavoju apakšuzdevumiem atbilstošos testus, nolīdzsvaroju punktus, Rihards uzrakstīja savu risinājumu, un uzdevums bija gatavs sacensībām.

No 7. līdz 18. decembrim notika sacensības, kuru laikā nekas īpašs nenotika. "Soliņu" uzdevumā seši dalībnieki saņēma 100 punktus, bija normāla punktu izkliede. Nedaudz izbrīnīja Anša Gustava Andersona iegūtie 15 punkti, bet tobrīd nodomāju, ka, iespējams, Ansis bijis laika trūkumā vai nostrādājuši kādi citi blakusfaktori. Vēl ievēroju, ka simtnieku skaits bija izteikti mazāks nekā uzdevumam "Izruna", lai gan abi šie uzdevumi sākotnēji tika uzskatīti par komplektā vieglākajiem.

Bet 20. decembrī notika absolūti negaidītais - Andris Andersons (Anša Gustava tēvs) atsūtīja e-pastu ar šādu testa piemēru:

```
10 5
9 1
2 2
9 3
2 4
8 5
```

Tālāk es uz šo piemēru atsaukšos kā "Andersona testu".

Tātad A. Andersons likumsakarīgi apgalvoja, ka šajā testā pareizā atbilde ir 10 - izmantojam divus garākos garumus, lai nodrošinātu pilnus kāju komplektus ar trīs īsāko garumu kājām. Manā, iepriekš par pareizu uzskatītajā, risinājumā atbilde būtu 8+9=17.

Pretpiemēra baisais skaistums ir tajā, ka nevajag būvēt nekādas pierādījumu ķēdes vai smalkas konstrukcijas. Re, kur ir sešas rindiņas, kas apgāž visu tavu algoritmu (neatkarīgi no tajā ieguldītā darba un laika) un uz tā veidoto atrisinājumu un, kā sekas, arī visu testu komplektu. Bet šoreiz tas nozīmēja, ka ne jau es viens esmu kļūdījies - ir kļūdījies arī Rihards un visi tie, kam tobrīd rezultātu tabulā bija simtnieki...

Tā, ka divi neatkarīgi žūrijas risinājumi (mans un Riharda) neatbilst uzdevuma nosacījumiem (tādā ziņā, ka nerealizē tur aprakstīto) bija vēl tikai vienreiz pirms daudziem gadiem. Toreiz gan situācija bija atšķirīga: uzdevumā pēc trim dotām taisnstūra virsotņu koordinātām vajadzēja atrast ceturtās virsotnes koordinātas, bet abi mūsu risinājumi derēja arī vispārīgākam gadījumam - paralelogramam. Šķietami labāka risinājuma sekas bija vairāku, no uzdevuma viedokļa, nekorektu testu "nepamanīšana", jo šajos testos bija aprakstītas paralelograma, ne taisnstūra virsotnes. Sacensībās dalībnieka risinājums, kas bija korekti uzrakstīts taisnstūrim, likumsakarīgi visus testus neizpildīja. Arī toreiz bija dalībnieki, kas rakstīja risinājumus paralelogramam un ieguva savus 100 punktus, ilgu laiku raisot ilūziju, ka ar uzdevumu viss ir kārtībā.

Atgriežoties pie "Soliņiem" - labi, skaidrs, ka ar šo uzdevumu ir ziepes un nāksies vismaz visu pārtestēt. Nekas patīkams tas nav - jāatbild A. Andersonam un jāatzīst kļūda, kā arī jābrīdina visi dalībnieki, ka rezultāti mainīsies. Šos darbiņus izdarīju, uzrakstot e-pastu, publicējot paziņojumu sistēmā un www.lio.lv, bet ko tālāk? Jātiek taču līdz pareizajiem testu izvaddatiem. Bet vai tas vispār ir iespējams? Vai, sarežģot uzdevuma nosacījumus, neesmu padarījis šo uzdevumu "nepaceļamu"? Kurā posmā spriedumu ķēdē ir bijusi kļūda? Galu galā arī savu nepareizo risinājumu es pats izdomāju, nevis izmantoju cita autora risinājumu!

Tātad jāsāk vēlreiz no sākuma. Datu ielasīšana un sakārtošana - tur viss ir kristālskaidri un caurskatāmi - šajā daļā kļūdām būt nevajadzētu.

Bet kas notiek ar pieņēmumu, ka uzreiz jāizveido maksimālais skaits soliņu no vienāda garuma kājām? Vai nevar būt tā, ka kāds K kāju komplekts tomēr jāsazāģē, lai tas tiktu izmantots īsāku kāju komplektu veidošanai?

Nē, tā nevar būt: Neko nezāģējot, no šīm K kājām var izveidot soliņa kāju komplektu. Šīs K kājas apzāģējot, arī būs dots ieguldījums kopumā viena soliņa izveidē, bet būs iztērēts par K zāģējumiem vairāk. Tātad variants ar derīga komplekta kāju apzāģēšanu nevar būt labāks par variantu bez apzāģēšanas.

Mazs, bet patīkams sīkums, ka kaut kas arī vecajā pieejā ir bijis pareizs un vērtīgs.

Tātad izejas pozīcija risinājuma beigu posmā, ka ir nenulles skaitļu virkne, kur katrs skaitlis apraksta noteiktā garuma kāju skaitu, kur garumi ir bijuši sakārtoti dilstošā secībā, paliek spēkā.

Tālāk.

Iepriekš tika pieņemts, ka viena garuma visas kājas vai nu tiek papildinātas, līdz pilnam komplektam, vai arī visas tiek apzāģētas. Tā joprojām ir taisnība, vai vairs nē? Kā ar apzāģēto kāju "plūšanu" no garākā uz īsāko galu metaforu - tā joprojām ir izmantojama?

Apgalvojums, ka visgarākās kājas nāksies apzāģēt, joprojām ir patiess (labi, ka neizmetu nosacījumu, ka visas kājas nāksies izmantot soliņu izgatavošanā). Tātad vismaz pirmajam (garākajam) garumam princips "jāizmanto visas" ir spēkā.

Tagad aplūkosim kaut kādu patvaļīgu kāju garumu g, līdz kuram esam nonākuši pēc kārtas aplūkojot garumus, virzoties no lielākā uz mazāko. Kājas garumā g ir skaitā X, un mums ir Y kājas, kuru sākotnējais garums ir lielāks par g, un kuras kaut kad nāksies apzāģēt. Šobrīd nepieciešams pieņemt lēmumu par kājām ar garumu g.

Ja $Y < K\text{-}X$, tad nav iespējams izveidot pilnu kāju komplektu ar kājām garumā g un visas X kājas kaut kad nāksies apzāģēt. Ja $Y \geq K\text{-}X$, tad varam izmantot $K\text{-}X$ kājas, lai izveidotu pilnu kāju komplektu un tālāk "aizplūdīs" $Y\text{-}(K\text{-}X)$ kājas, kuru garums ir lielāks par g.

Bet, kas notiks, ja situācijā $Y > K\text{-}X$ komplekta veidošanai izmantosim mazāku ($X'<X$) kāju garumā g un attiecīgi lielāku ($K\text{-}X' > K\text{-}X$) "atplūdušo" kāju skaitu? Tad atlikušās $X\text{-}X'>0$ kājas nāksies izmantot īsāku komplektu veidošanā un, tātad kaut kad apzāģēt. Bet cik un kādas kājas tagad "plūdīs tālāk" uz īsākiem garumiem? Tādas būs $Y\text{-}(K\text{-}X')$ kājas ar garumu, kas lielāks par g, un $(X\text{-}X')$ kājas garumā g. Tātad kopskaitā būs $Y\text{-}(K\text{-}X)$ tālāk plūstošās kājas, bet, salīdzinot, ar iepriekš maksimāli izmantoto kāju skaitu, būs veikti $X\text{-}X'>0$ lieki zāģējumi. Tātad optimālā risinājumā šāda situācija būt nevar un princips "visu ņem un apzāģē" vai "visu izmanto šī garuma kāju komplektā" darbojas.

Jauki. Bet kur tad slēpjas problēma?

Manā vecajā risinājumā tiklīdz komplektu varēja izveidot, tas arī tika izveidots. Andersona testā skaidri parādās, ka ne vienmēr tas ir izdevīgi - otrās garākās kājas netiek izmantotas komplekta veidošanā, bet ir izdevīgāk apzāģēt.

Es uzrakstīju risinājumu, kur katram garumam pieļāvu iespēju gan izmantot "atplūdušās" kājas (ja to skaits bija pietiekams), gan "padot tālāk" vēlākai izmantošanai. Šāds risinājums labi strādāja mazām N vērtībām, bet jau vidēji lieliem testiem vilkās nesaprātīgi ilgi. Kosmētisks uzlabojums, kas neko daudz nepalīdzēja, bija variants, kur visu iespējamo variantu aplūkošana notiek vienlaikus gan no lielākā, gan mazākā garuma. Lai gan arī šis risinājums bija ekstrēmi lēns, tas tomēr bija kaut kas - ar tā palīdzību kaut ilgā laikā, bet tomēr varēja iegūt pareizos testu izvaddatus.

21. decembra 19.14 informēju LIO žūriju par Andersona testu, un gan Rihards, gan Pēteris solījās uzrakstīt savus risinājumus.

Paralēli fonā mani visu laiku urdīja ideja - vai sākotnējo risinājumu nevar izmantot kā bāzi, kuru iespējams uzlabot? Vienubrīd šo risinājumu integrēju savā neefektīvajā risinājumā, lai laikus atmestu tos variantus, kas pārsniedz šo "saprāta robežu". Bet šīm darbībām nebija liela efekta un ar tādiem paņēmieniem nevar pretendēt uz jēgpilna atrisinājuma veidošanu.

Tad kā mans vecais (un nepareizais) risinājums atšķiras no optimālā kāju garuma apstrādē? Ja ar "+" apzīmēšu tos garumus, kuri tiks apzāģēti, un ar "-" tos, kuri bez apzāģēšanas tiks izmantoti kāju komplekta veidošanā, tad Andersona testā ir šāda situācija (garumi dilst no kreisās puses uz labo):

Skaits	8	2	9	2	9
Mans ris.	+	-	+	-	-
Optimālais	+	+	-	-	-

Tātad viens "+" un viens "-" ir samainīti vietām. Plusam un mīnusam atbilstošie skaitļi ir atšķirīgi, bet beigu bilance abos gadījumos sanāk pareiza. Kā tā? Vai jebkuru "+" var mainīt ar jebkuru "-"? Vai "plūstošo" kāju bilance netiks nojaukta? Nolēmu izpētīt, kas notiks, ja Andersona testā pieredzēto

X	…	Y
-		+

, kur Y>X nomainīšu ar

X	…	Y
+		-

- tieši šī nomaiņa ļāva Andersona testā pārvērst neoptimālu atrisinājumu optimālā.

Pieņemsim, ka variantā "X-Y+" tieši pirms X apstrādes ir "atplūdušas" Z kājas, bet pirms Y apstrādes - W kājas. Tad pēc X apstrādes tālāk ceļos Z+X-K, bet pēc Y apstrādes - W+Y kājas. Turklāt pēc X un pirms Y apstrādes, pretrunu starp Z+X-K un W nav.

Savukārt, variantā "X+Y-" pēc X tālāk ceļo Z+X kājas, kas nozīmē, ka pēc X ceļo par K kājām vairāk, salīdzinot ar iepriekšējo variantu. Pirms Y apstrādes tad ir W+K kājas, bet pēc - W+K-(K-Y) = W+Y. Kā redzams, izmaiņas ir ietekmējušas tikai X un Y - pirms X un pēc Y skaita izmaiņu nav, bet otrajā variantā ir mazāks apzāģēto kāju skaits - Y vietā X (pēc pieņēmuma Y>X).

Un tobrīd parādījās tā retā sajūta, ka viss beigsies lieliski - būs efektīvs risinājums un kopumā visu situāciju ap "Soliņu" uzdevumu izdosies atrisināt gana nesāpīgi.

Atlika realizēt uztaustīto ideju, ka tiklīdz apstrādē parādās situācija, ka iepriekš ir bijis mazāks "-", tā jāsamaina vietām kārtējais "+" ar šo mazāko "-", kas, vienkāršoti runājot, nozīmē, ka "šo pašu efektu varēja panākt ar mazākām izmaksām". Uzrakstītais risinājums burtiski lidoja, un, pateicoties tam, ka ar ekstrēmi lēno jau bija iegūti pareizie izvaddati, varēja pārliecināties, ka tie sakrīt. Jau pirms tam savus divus risinājumus bija iesūtījis Rihards un arī tie deva tādus pašus rezultātus (jau atkal ☺).

Andrejs veica pārtestēšanu, kurā visi simtnieki nokrita uz 15, bet A. G. Andersons un Mihails Abramovs ieguva 100 punktus.

Ar to stāstu par "Soliņiem" varētu beigt. Uzdevums izrādījās interesantāks, nekā domāju iepriekš, un, ja zinātu par šo "slazdu", tas būtu lieliski iederējies arī "īstās" (ne iesildīšanās) sacensībās. Bet, kurš gan to varēja paredzēt …

2020. gada 23. decembrī

Mārtiņš Opmanis